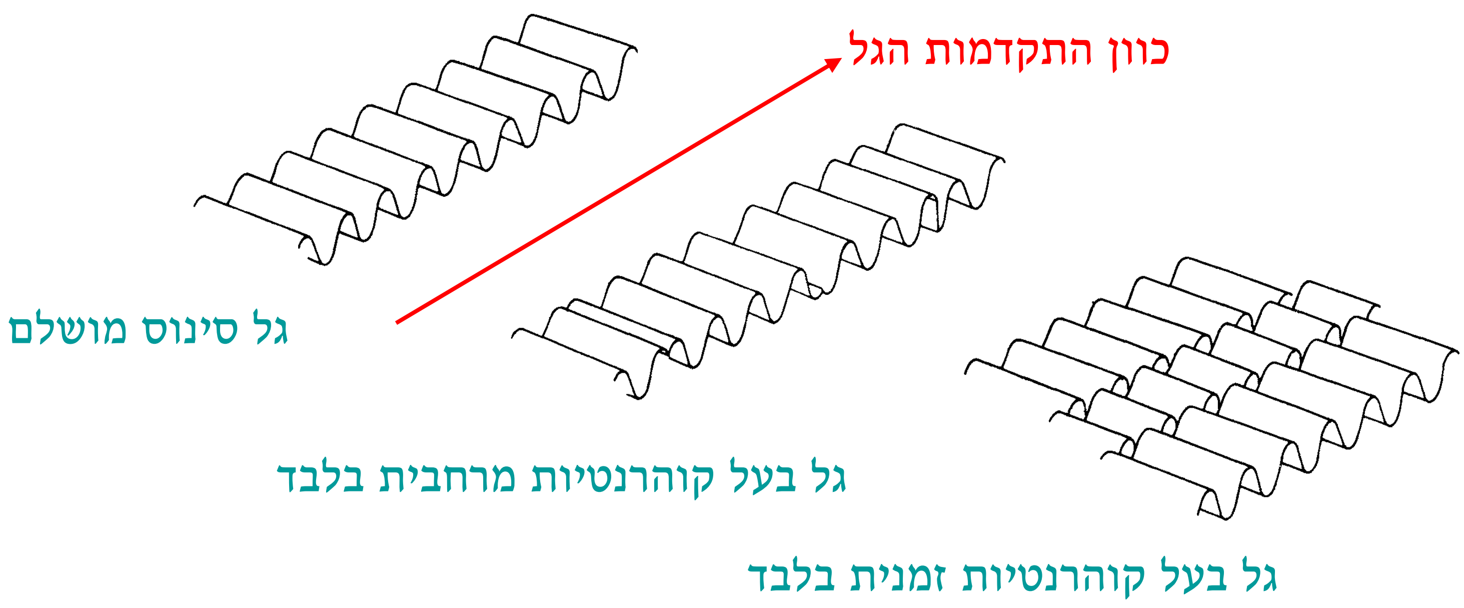
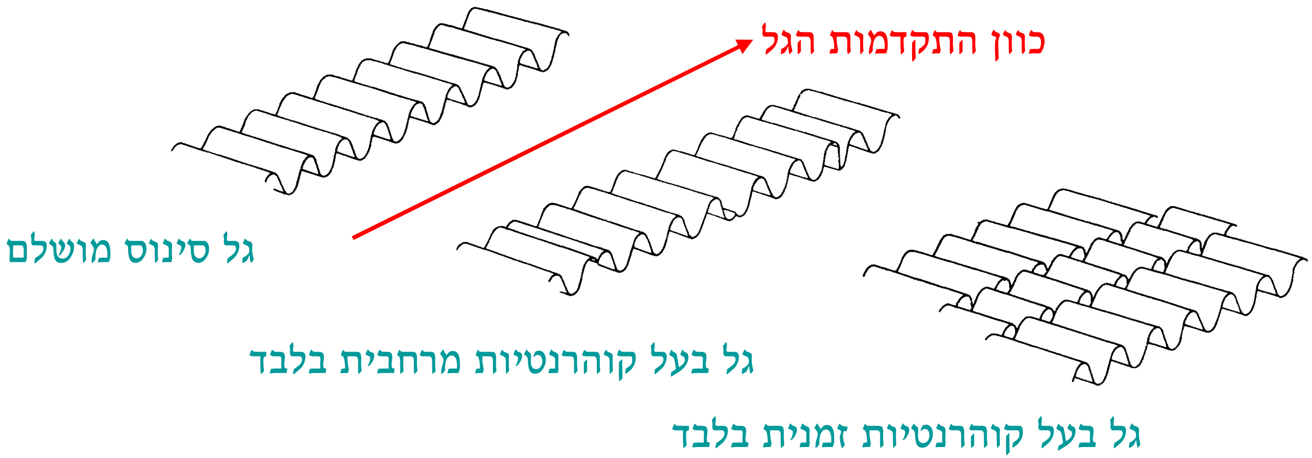
מהי קוהרנטיות?

- תיארנו גלים עד כה באמצעים הרמוניים: איך ניתן לרשום גל כסינוס טהור ואינסופי באורכו.
- אם הגל אכן ניתן לתיאור מלא על ידי תדר זמני ω ועל ידי וקטור גל **k**, הוא יהיה קוהרנטי לחלוטין.
- קוהרנטיות מתארת את המידה בה אכן הגל מקיים את התנאי ההרמוני המושלם.
- אם יש שינויים קלים בתדר הגל או בכיוונו, אזי הגל קוהרנטי חלקי.
- שינויים אלו יכולים לחול גם במרחב וגם בזמן, ואז הקוהרנטיות חלקית במרחב או בזמן.



גלי אור

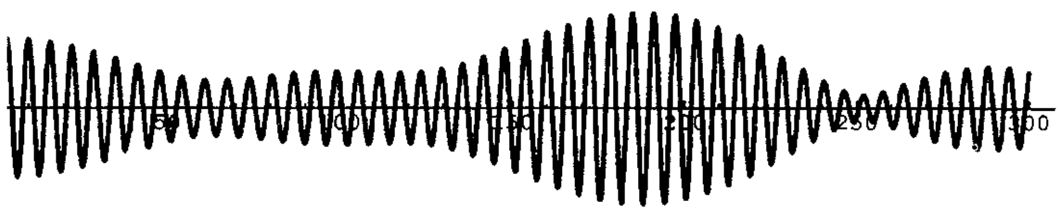


- מהו גל אור אמיתי, הנפלט על ידי מקור חד-צבע קלאסי?
- האור מגיע ממספר אטומים, כאשר כל אחד מהם עובר בין אותן שתי רמות אנרגיה.
- למרות זה, אין קשר בין האטומים הקורנים, וכל אחד פולט קרינה בזמנו הוא.
- בבדיקה ספקטרוסקופית מדויקת יתברר לנו כי נפלטים כמה אורכי גל בעת ובעונה אחת.
- לקו יש עובי ספקטרלי, הקרוי רוחב הקו.
- אם רוחב הקו פחות בהרבה מאורך הגל הממוצע, הקרינה היא קוואזי-מונוכרומטית, והאור כמעט חד-צבע.
- הסיבה לכך היא למשל שהאטומים בגז פולט נעים בכיוונים אקראיים, ונוספות הסחות דופלר לאורך הגל.
- באותה דרך ניתן להסתכל על אטומים הפולטים באותו כיוון, שם הם נמדדים.
- הגלים שהם פולטים אינם מתחברים לגל אחד, ואז הקוהרנטיות המרחבית נפגמת.

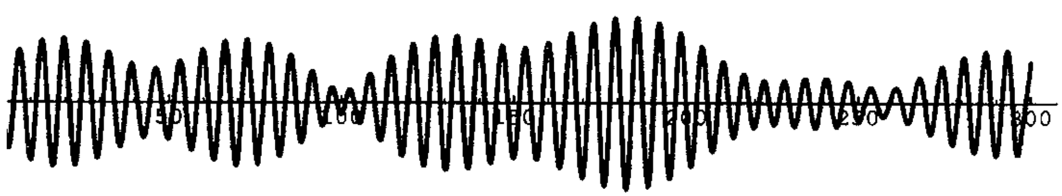
ניתוח גלי אור

- ניתן לנתח את צורת גלי האור באמצעות סכום פוריה.
- ניקח מספר גלי סינוס בתדרים אקראיים בטווח קרוב - רוחב הקו שלהם - ונחבר אותם.
- מקבלים פעימות בין הגלים השונים, ההולכות ומתגברות עם הגדלת תחום התדרים.
- אורך הפעימות יחסי בערך לטווח התדרים.

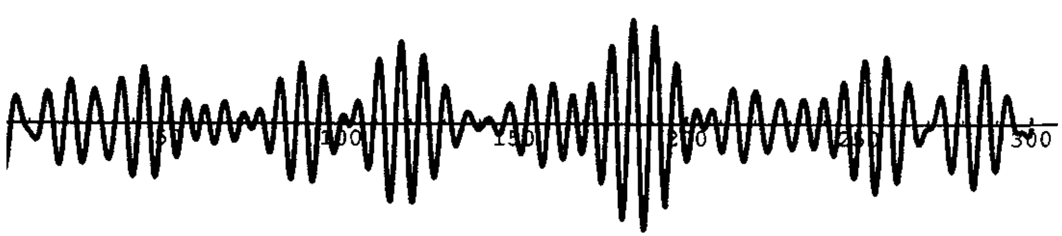
חמישה קוים בעלי פיזור אקראי סביב תדר מרכזי ω_0



תחום תדרים $\omega_0(1\pm0.02)$



תחום תדרים $\omega_0(1\pm0.04)$

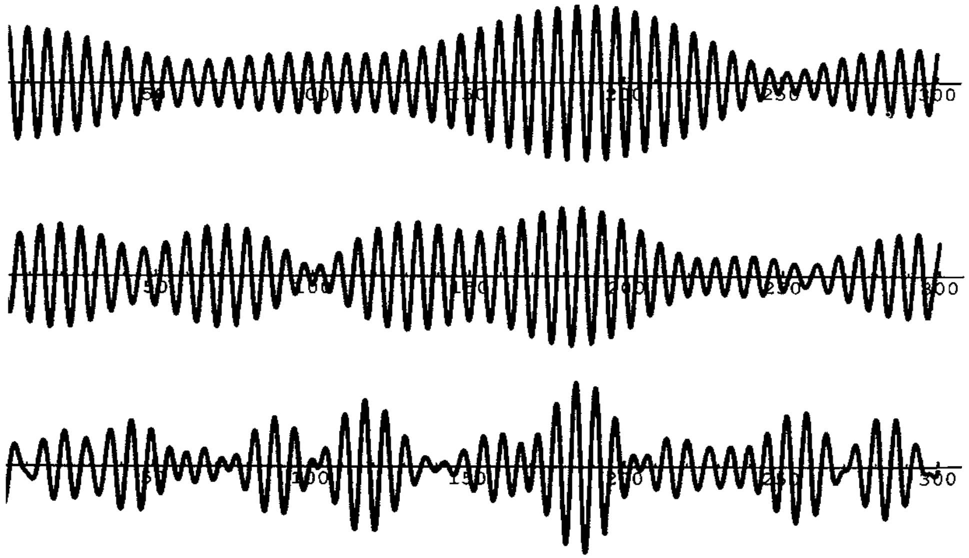


תחום תדרים $\omega_0(1\pm0.08)$

גלי אור כחבילות גלים

- נתבונן בכל פעימה כחבילת גלים עצמאית.
- הגל כולו ייראה כסדרה של חבילות גלים כאלו הנפלטות בזמנים אקראיים.
- עם זאת, אין חבילות הגלים מייצגות פוטונים בודדים, שהם היחידות הקוואנטיות של אנרגית האור.
- הדבר נובע מהתאור הקלאסי של האור, תיאור המונע יצירת חלקיקים בדידים של אור.
- ראינו שאורך חבילות הגלים יחסי לאורך הפעימות, כלומר לפיזור התדרים.
- לעומת זאת, פוטונים נוצרים כתלות בעוצמת האור.

חמישה קוים בעלי פיזור אקראי סביב תדר מרכזי ω_0



תחום תדרים $\omega_0(1\pm0.02)$

תחום תדרים $\omega_0(1\pm0.04)$

תחום תדרים $\omega_0(1\pm0.08)$

תאור גלי האור

- נבנה דגם פשוט של האור.
- נתיחס לממוצע של פונקציה כללית $g\,(t)$ על פני משך זמן T:

$$\langle g \rangle_T = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(t)\,\mathrm{d}t$$

- נשתמש בתאור המרוכב של הגל, אם כי בזמן מדידה ניתן רק לצפות בריבוע המשרעת שלו.
- המשרעת והעוצמה של גל המורכב ממספר גדול N של גלים במשרעת שווה a מתוארים על ידי

$$f(t) = a\sum_{n=1}^{N} \mathrm{e}^{i(\omega_n t+\phi_n)} \;;\; I(t) = \left|f(t)\right|^2 = a^2\left|\sum_{n=1}^{N} \mathrm{e}^{i(\omega_n t+\phi_n)}\right|^2$$

- ניתן לפרק את ריבוע הסכום לסכום כפול של המעריכים

$$I(t) = a^2\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} \mathrm{e}^{i\left[(\omega_m-\omega_n)t+\phi_m-\phi_n\right]}$$

ממוצע גלי האור

- עוצמת סכום הגלים היא

$$I(t)=a^2\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}\mathrm{e}^{i[(\omega_m-\omega_n)t+\phi_m-\phi_n]}$$

- נתיחס לממוצע של העוצמה $I(t)$ על פני משך זמן T:

$$\langle I(t)\rangle_T=\frac{a^2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}\mathrm{e}^{i[(\omega_m-\omega_n)t+\phi_m-\phi_n]}\,\mathrm{d}t$$

- זמן האינטגרציה T חשוב כאן, כיון שאפשר לבחור אותו קצר בשיעור של פעימה אחת, או של זמן ארוך.
- נקבע זמן פעימה T_b, ומחזור פעימה אופייני $2\pi/\varepsilon$ המכיל בערך ω_0/ε גלים סביב ω_0.
- בזמן אינטגרציה ארוך T_0 יתמצעו המופעים התלויים בהפרשי תדרים $(\omega_m-\omega_n)t$ לאפס.
- רק האברים בהם $m=n$ ישארו, ולכולם מופע אפס ומשרעת של יחידה. נקבל

$$\langle I(t)\rangle_{T_0}=\frac{a^2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}\sum_{n=1}^{N}\mathrm{e}^{i0}\,\mathrm{d}t=a^2N$$

- כלומר, בגלל שאין מתאם (קורלציה) בין הגלים השונים, עוצמת סכומם שווה לסכום עוצמותיהם.

ממוצע קצר של גלי האור

- נתיחס כעת לממוצע של העוצמה $I\,(t)$ על פני משך זמן הפעימה T_b:

$$\left\langle I\left(t\right)\right\rangle_{T_b} = \frac{a^2}{T_b}\int_{-T_b/2}^{T_b/2}\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}\mathrm{e}^{i\left[\left(\omega_m-\omega_n\right)t+\phi_m-\phi_n\right]}\,\mathrm{d}t$$

- נניח שכעת המופע $(\omega_{\mathrm{m}} - \omega_{\mathrm{n}})T_b$ לא ישתנה הרבה, וערכו המירבי יהיה קטן מרבע מחזור, או $\varepsilon\, T_b < \pi / 2$

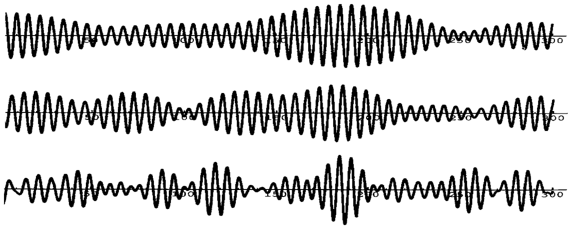
$$\left\langle I\left(t\right)\right\rangle_{T_b} = \frac{a^2}{T_b}\int_{-T_b/2}^{T_b/2}\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}\mathrm{e}^{i\left[\phi_m-\phi_n\right]}\,\mathrm{d}t = a^2N + 2a^2\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{m-1}\cos\left(\phi_m-\phi_n\right)$$

- בסכום הפרדנו בין N האברים האלכסוניים $m = n$ ושאר האברים (לקחנו את חציים וכפלנו ב-2).
- בזמן האינטגרציה של הפעימה T_b המופעים באבר האחרון יהיו קבועים, אם כי לא ידועים.
- הממוצע של הריבועים של $N^2/2$ האברים האלו יהיה

$$\tfrac{1}{2}N^2\cdot 4a^4\left\langle\cos^2\left(\phi_m-\phi_n\right)\right\rangle = a^4N^2$$

- כלומר, לשינויים באבר זה יש ערך ששורש ממוצע הריבועים שלו הוא a^2N. אבל גם הממוצע הוא a^2N.
- השינויים בעוצמה הם בסדר הגודל של הממוצע עצמו אפילו עבור מספר אינסופי של אברים.
- זמן המדידה הוא כרבע מחזור פעימה אופיני, $\varepsilon\ \pi / 2$, שהוא בערך זמן הקוהרנטיות של האות.
- זמן הקוהרנטיות של מקורות אור רגילים הוא בערך $\tau_c \approx 10^{-10}$ s.

פעימת גל האור



- ראינו כי הגל הוא

$$f(t) = a\,\mathrm{e}^{i\omega_0 t}\sum_{n=1}^{N}\mathrm{e}^{i\left[(\omega_n-\omega_0)t+\phi_n\right]}$$

- הגדרנו את אורך הפעימה כך שעבור זמן המקיים $t_1 < T_b$ יהיה השינוי במופע קטן, $|\omega_n - \omega_0|\, t_1 << \pi/2$.
- הגל יהיה בקירוב

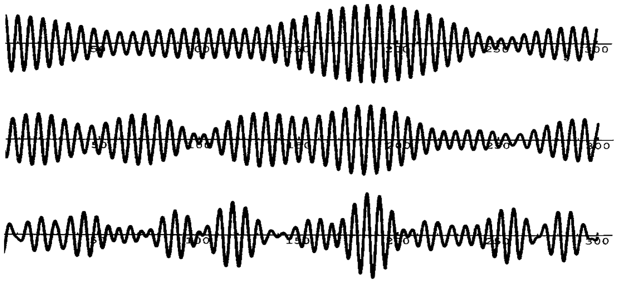
$$f(t_1) \approx a\,\mathrm{e}^{i\omega_0 t}\sum_{n=1}^{N}\mathrm{e}^{i\phi_n} \equiv a\,\mathrm{e}^{i\omega_0 t}\cdot\alpha_1\,\mathrm{e}^{i\Phi_1} = a\alpha_1\,\mathrm{e}^{i(\omega_0 t+\Phi_1)}$$

- הקבועים α_1 ו- Φ_1 אינם ידועים, אבל שונים מאפס. נחזור על המדידה עבור זמן שווה אחר, $t_2 = t_1$ ונקבל

$$f(t_2) = a\alpha_2\,\mathrm{e}^{i(\omega_0 t+\Phi_2)}$$

- הקבועים α_2 ו- Φ_2 אינם ידועים ושונים מהקבועים הקודמים α_1 ו- Φ_1. לכן אנחנו יכולים להסיק כי בתקופת מדידה הקצרה מפעימה הגל מתנהג כגל סינוס טהור בעל עוצמה ומופע קבועים.

חבורות גלים אקראיות



- ננסה לאפין את הגלים שבציור. ניקח למשל חבורת גל גאוסית

$$f\left(t\right)=A\,\mathrm{e}^{-i\omega_0 t}\ \mathrm{e}^{-t^2/2\sigma^2}$$

- ההתמרה של חבורת גל זו תהיה

$$F\left(\omega\right)=2\pi A\sqrt{2\pi\sigma^2}\ \mathrm{e}^{-\left(\omega-\omega_0\right)^2\sigma^2/2}$$

- כעת ניצור סדרה של חבורות גלים כאלו הממורכזות על זמנים אקראיים t_n

$$f_{\mathrm{r}}\left(t\right)=\sum_{n=1}^{N}f\left(t-t_n\right)$$

- ההתמרה של הסדרה האקראית תהיה

$$F_{\mathrm{r}}\left(\omega\right)=F\left(\omega\right)\sum_{n=1}^{N}\mathrm{e}^{-i\omega t_n}=F\left(\omega\right)\beta\,\mathrm{e}^{-i\psi\left(\omega\right)}$$

ספקטרום של חבורות גלים אקראיות

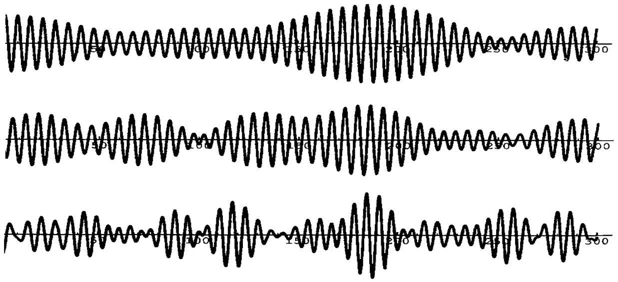
- קיבלנו שההתמרה של הסדרה האקראית היתה

$$F_{\mathrm{r}}(\omega) = F(\omega)\,\beta\,\mathrm{e}^{-i\psi(\omega)} = 2\pi A\sqrt{2\pi\sigma^2 N}\,\mathrm{e}^{-(\omega-\omega_0)^2\sigma^2/2 - i\psi(\omega)}$$

- האיבר מימין הוא המקרה הפרטי עבור חבורת גלים גאוסית.
- העוצמה של N חבורות הגלים היא, לפי משפט פרסוול, N אף היא, ולכן המשרעת היא $\beta = \sqrt{N}$.
- המופע של כל חבורת גלים היא אקראי, והמופע הכולל $\psi(\omega)$ משתנה בכל תדר ω.
- לכן הספקטרום הוא כשל חבורת גל אחת (כאן למשל גאוסית), אבל המופע שלה הוא אקראי.
- ספקטרום העוצמה, שהוא ממוצע ריבועי המשרעות, מוגדר היטב וערכו

$$\left|F_{\mathrm{r}}(\omega)\right|^2 = \beta^2\left|F(\omega)\right|^2 = N\left|F(\omega)\right|^2 = 8\pi^3 A^2\sigma^2 N\,\mathrm{e}^{-(\omega-\omega_0)^2\sigma^2}$$

- גם כאן האיבר מימין הוא המקרה הפרטי עבור חבורת גלים גאוסית.



אור לבן

- נקצר כעת את חבורת הגלים עד שתהפוך לכמעט פונקצית δ.
- במקרה כזה התמרתה $F(\omega)$ תשאף לערך קבוע, שאינו תלוי בתדר.
- אם כך, ההתמרה של סדרה של פונקציות δ הנפלטות בזמנים אקראיים, הופכת לסדרה של כל התדרים הקורים במופעים אקראיים.
- זוהי ההגדרה של אור לבן:

הוא מכיל את כל התדירויות במידה שווה, ואין כל מִתאם בין המופעים שלהן.

- הגדרה דומה נקבל גם עבור רעש לבן:

הוא מכיל את כל התדירויות במידה שווה, ואין כל מִתאם בין המופעים שלהן.

רוחב קו טבעי

- קו ספקטרלי נוצר ממעבר קוואנטי שבו אטום או מולקולה עוברים מרמה A לרמה B.
- לרמות אלו יש אנרגיות E_A ו-E_B והגל הנפלט הוא באנרגיה

$$\frac{h}{2\pi}\omega_0 = \hbar\omega_0 = E_A - E_B$$

- $h = 6.62 \cdot 10^{-34}$ J s הוא קבוע פלאנק, ומכאן $\hbar = h / 2\pi = 1.054 \cdot 10^{-34}$ J s .
- פרט לרמת היסוד, אף רמת אנרגיה אינה יציבה בגלל שינויים בשדה האלקטרומגנטי בסביבה.
- לכן אטום ברמה A ירד לרמה נמוכה יותר לאחר זמן ממוצע T_A.
- לפי עיקרון אי הוודאות האנרגיה E_A עצמה לא ידועה בשיעור

$$\delta E \approx \frac{h}{T_A}$$

- אי הוודאות בתדר נותנת את רוחב הקו הטבעי:

$$\delta\omega = 2\pi\left(\frac{1}{T_A} - \frac{1}{T_B}\right)$$

- רוחב זה הוא צר יחסית. לרוב נקבע רוחב הקו מגורמים אחרים ורק בתנאים מיוחדים ניתן להשיג אותו.

הרחבת דופלר

- נניח גז המכיל אטומים בודדים שמסתם m בטמפרטורה T.
- אם אטום פולט אור בעת תנועתו לאורך קו הראיה, יראה קו הפליטה כאילו הוזז ממקומו.
- הזזת דופלר קשורה לתדר הנצפה דרך

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{v_x}{c} \right)$$

- כאשר v_x הוא המהירות לאורך ציר x למשל.
- פילוג המהירויות לאורך הציר תהיה

$$f\left(v_x\right) = C \exp \frac{-m{v_x}^2 c^2}{2k_B T}$$

- מציבים את המהירות ומקבלים את ספקטרום התדירויות

$$F\left(\omega\right) = C \exp \frac{-m\left(\omega - \omega_0\right)^2 c^2}{2\omega_0^2 k_B T}$$

רוחב קו דופלר

- קיבלנו את ספקטרום התדירויות

$$F\left(\omega\right)=C\exp\frac{-m\left(\omega-\omega_0\right)^2c^2}{2\omega_0^2k_BT}$$

- ספקטרום זה ניתן להיכתב כגאוסיאן, אשר השונות וסטית התקן שלו הן

$$V=\omega_0^2\frac{k_BT}{mc^2}\ ;\ \sigma=\sqrt{V}=\omega_0\sqrt{\frac{k_BT}{mc^2}}$$

- הרוחב בחצי הגובה בגאוסיאן הוא 2.36σ. מכאן שחצי הרוחב בחצי הגובה, במונחים של אורך גל, הוא

$$\delta\lambda=1.18\lambda_0\sqrt{\frac{k_BT}{mc^2}}$$

- למשל רוחב הקו המדוד של קריפטון, Kr^{84} הוא 0.003Å. אורך הגל הוא λ_0= 5600Å, מסת האטום היא m = 1.4•10^{-25}kg והטמפרטורה T = 80 K. מקבלים חצי רוחב בשיעור קרוב: $\delta\lambda \approx$ 0.002Å.

הרחבת התנגשויות

- רק בצפיפות מאוד נמוכה ובחום מאוד נמוך לא נקבל התנגשויות בין האטומים, ועל כן אפקט דופלר אינו היחיד הגורם להרחבת קוים.
- ניקח יחידת נפח שבה N מולקולות, חתך הפעולה שלהן להתנגשות הוא A, ומהירותן הממוצעת v.
- הזמן הממוצע בין התנגשויות הוא בקירוב

$$\tau_1 = \frac{1}{4NvA}$$

- קיים קשר בין פרמטרים אלו ובין הטמפרטורה T והלחץ P :

$$Nv = P\sqrt{\frac{3}{mk_B T}}$$

- נחלץ ונקבל

$$\tau_1 = \frac{\sqrt{mk_B}}{4\sqrt{3}A}\frac{\sqrt{T}}{P}$$

- בעת התנגשות של אטום, אובדים כל קשרי המופע בין הגל הפוגע והמתפזר. לכן הקרינה מכל אטומי הגז תופיע כסדרת התפרצויות קרינה שאין ביניהן קשר כלשהו.

הרחבת התנגשויות

- אורך התפרצויות הקרינה הוא τ_1. ההסתברות של התפרצות באורך כלשהו τ הוא לכן

$$p(\tau) = \mathrm{e}^{-\tau/\tau_1} / \tau_1$$

- הגל הנפלט מכין חבילות גלים שתדריהן ω_0 ומופעיהן אקראיים, הם מתחילים בזמנים אקראיים ומסתיימים לפי ההסתברות לעיל.
- ספקטרום העוצמה של הגלים הוא ממוצע ספקטרום העצמה של הגלים הבודדים, שמופעם אקראי:

$$\left|F(\omega)\right|^2 = \int_0^\infty \left[\int_{-\tau/2}^{\tau/2} \exp(-i\omega_0 t)\, \exp(-i\omega t)\mathrm{d}t\right]^2 p(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

- האינטגרל הפנימי הוא התמרת פוריה של גל הרמוני שאורכו τ, והחיצוני הוא הממוצע הסטטיסטי.
- האינטגרל הפנימי הוא של חלון מרובע. מקבלים

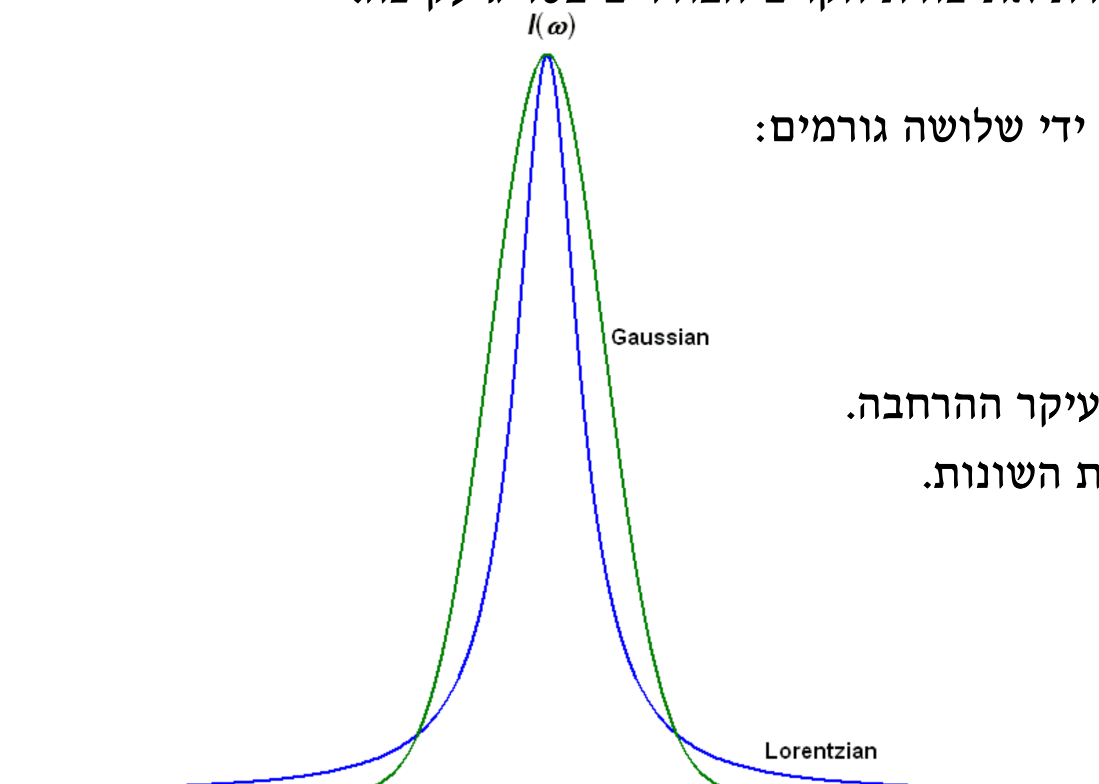
$$\begin{aligned}\left|F(\omega)\right|^2 &= \int_0^\infty \left\{\tau \,\mathrm{sinc}\left[\tau(\omega-\omega_0)/2\right]\right\}^2 p(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{4}{\tau_1(\omega-\omega_0)^2}\int_0^\infty \exp -\frac{\tau}{\tau_1}\ \sin^2\frac{\tau(\omega-\omega_0)}{2}\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{2\tau_1^2}{1+\tau_1^2(\omega-\omega_0)^2}\end{aligned}$$

הלורנציאן

- ספקטרום העוצמה של חבילות גלים אקראיות בזמני אקראיים ובאורך τ_1 הוא הלורנציאן (Lorentzian)

$$\left|F(\omega)\right|^2 = \frac{2\tau_1^2}{1+\tau_1{}^2(\omega-\omega_0)^2}$$

- זוהי פונקציה שמרכזה ב-ω_0 ורוחבה בחצי הגובה הוא $2/\tau_1$. היא דומה לגאוסיאן, אם כי יורדת לאט יותר לאפס בתדרים גבוהים. פונקציה זו גם מתארת את צורת הקוים הבודדים בסריג עקיפה.



- ראינו שרוחב הקוים הספקטרליים נקבע על ידי שלושה גורמים:
  - הרוחב הטבעי
  - הרחבת דופלר
  - הרחבת ההתנגשויות
- השתים האחרונות חשובות יותר וגורמות לעיקר ההרחבה.
- קיים קושי להפריד בין השפעות ההתנגשויות השונות.